İkinci Dereceden Denklemler

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemler

- $a \neq 0$, $a,b,c \in R$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem** denir. a, b ,c gerçek sayılarına da **denklemin katsayıları** denir.
- $ax^2 + bx + c = 0$ denklemini sağlayan x sayılarına **denklemin kökleri** , köklerin oluşturduğu kümeye **denklemin çözüm kümesi** denir.

ÖRNEK:

Aşağıdaki denklemlerin ikinci dereceden bir denklem olup olmadığını bulunuz.

a) $x^3 -2x^2 + 2 = 0$

b) $x^2 - 3x + 1 = 0$

c) $3x + 2 = 0$

d) $-5x^2 +7x – x^3 = 0$

e) $\frac{4}{5}x^2 + x – 5 = 0$

ÇÖZÜM:

a) $x^3 -2x^2 + 2 = 0$ denkleminin en büyük dereceli terimi x^3 tür

Bu denklem ,ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem değildir.

b) $x^2 - 3x + 1 = 0$ denkleminin en büyük dereceli terimi x^2 dir.

Bu denklem ,ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemdir.

c) $3x + 2 = 0$ denkleminin en büyük dereceli terimi x^1 dir.

Bu denklem ,ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem değildir.

d) $-5x^2 +7x – x^3 = 0$ denkleminin en büyük dereceli terimi $-5x^3$ tür

Bu denklem ,ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem değildir.

e) $\frac{4}{5}x^2 + x – 5 = 0$ denkleminin en büyük dereceli terimi $\frac{4}{5}x^2$ dir.

Bu denklem ,ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemdir.

ÖRNEK:

Ebru , ağabeyi Can’dan 4 yaş küçüktür. Ebru ile Can’ın yaşları çarpımı 60 olduğuna göre, Ebru’nun bugünkü yaşına uygun bir denklem yazınız.

ÇÖZÜM:

Ebru’nun yaşı x olsun. Can’ın yaşı x + 4 olur.

$x (x+4) = 60$

$x^2 + 4x = 60 \Rightarrow x^2 + 4x – 60 = 0$ olur.

İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

ÖRNEK:

$x^2 - 2x - 15$ ifadesini tam kare ve iki kare farkına ait özdeşlikleri kullanarak çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM:

1.Yol:

$x^2 - 2x - 15 = 0$ üç terimlisini çarpanlarına ayırabiliriz.

$$\begin{array}{ll} x^2 - 2x & -\ 15 = 0 \\ x & 3 \\ \underline{x} & \underline{-5} \\ \multicolumn{2}{l}{-5x + 3x = -2x} \end{array}$$

$x^2 - 2x - 15 = 0$ denklemi $(x + 3)(x - 5) = 0$ biçiminde çarpanlarına ayrılır.

2.Yol :

$x^2 - 2x - 15 = 0$ denklemini tam kare ve iki kare farkına ait özdeşlikleri kullanarak çarpanlarına ayırabiliriz.

$x^2 - 2x - 15$ ifadesini tam kare biçimine getirmek için 16 ekleyip 16 çıkaralım.

$x^2 - 2x - 15 + 16 - 16 = (x^2 - 2x + 1) - 16$ olur.

$$\underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{\text{Tam Kare}} - 16 = \underbrace{(x - 1)^2 - 4^2}_{\text{İki Kare Farkı}}$$ biçiminde iki kare farkı olur.

$$(x - 1)^2 - 4^2 = [(x - 1) + 4]\,[(x - 1) - 4] = (x - 1 + 4)(x - 1 - 4)$$
$$= (x + 3)(x - 5) \text{ bulunur.}$$

ÖRNEK:

$x^2 + 4x - 5$ ifadesini tam kare ve iki kare farkına ait özdeşlikleri kullanarak çarpanlarına ayırınız.

ÇÖZÜM:

1.Yol:

$x^2 + 4x - 5 = 0$ üç terimlisini çarpanlarına ayırabiliriz.

$$\begin{array}{ll} x^2 + 4x & -\ 5 = 0 \\ x & 5 \\ \underline{x} & \underline{-\ 1} \\ \multicolumn{2}{l}{-x + 5x = +4x} \end{array}$$

$x^2 + 4x - 5 = 0$ denklemi $(x + 5)(x - 1) = 0$ biçiminde çarpanlarına ayrılır.

2.Yol :

$x^2 + 4x - 5$ ifadesini tam kare ve iki kare farkına ait özdeşlikleri kullanarak çarpanlarına ayırabiliriz.

$x^2 + 4x - 5$ ifadesini tam kare biçimine getirmek için 9 ekleyip 9 çıkaralım.

$x^2 + 4x - 5 + 9 - 9 = (x^2 + 4x + 4) - 9$ olur.

$\underbrace{(x^2 + 4x + 4)}_{\text{Tam Kare}} - 9 = \underbrace{(x + 2)^2 - 3^2}_{\text{İki Kare Farkı}}$ biçiminde iki kare farkı olur.

$(x + 2)^2 - 3^2 = [(x + 2) + 3] [(x + 2) - 3] = (x + 2 + 3)(x + 2 - 3)$

$= (x + 5)(x - 1)$ bulunur.

$a \neq 0$ ve $a, b, c, p, q \in R$ olmak üzere, $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $ax^2 + bx + c$ üç terimlisi çarpanlarına ayrılıyorsa,

$a x^2 + bx + c = 0$
px   m
qx   n

$ax^2 + bx + c = (px + m)(qx + n) = 0$ olur. Bu iki çarpanın çarpımları 0 olduğu için,

$px + m = 0 \Rightarrow px = -m \Rightarrow x = -\frac{m}{p}$ dir.

$qx + n = 0 \Rightarrow qx = -n \Rightarrow x = -\frac{n}{p}$ dir. Bulunan x değerlerine $ax^2 + bx + c = 0$ **denkleminin kökleri** denir. (Kökler, $x_1 = -\frac{m}{p}$ ve $x_2 = -\frac{n}{p}$ biçiminde iki gerçek köktür.) Çözüm Kümesi **Ç.K = $\{-\frac{m}{p}, -\frac{n}{p}\}$** biçiminde gösterilir.

ÖRNEK:

$x^2 - x + 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x^2 - x + 6 = 0$ üç terimlisini çarpanlarına ayırabiliriz.

$x^2 - x + 6 = 0$
x   - 3
x   2
$-3x + 2x = -x$

$x^2 - x + 6 = 0$ denklemi $(x + 2)(x - 3) = 0$ biçiminde çarpanlarına ayrılır. Çarpanlar ayrı ayrı 0 a eşitlenerek denklemin kökleri bulunur.

$x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ ve

$x - 3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3$ Ç.K= { -2 , 3 } olur.

ÖRNEK:

$x^2 + 4x + 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x^2 + 4x + 6$ ifadesini tam kare ve iki kare farkı özdeşliklerinden faydalanarak çarpanlarına ayıralım.

$x^2 + 4x + 6$ ifadesini tam kare biçimine getirmek için 2 ekleyip 2 çıkaralım.

$$x^2 + 4x + 6 + 2 - 2 = (\underbrace{x^2 + 4x + 4}_{\text{Tam Kare}}) + 2 = (x + 2)^2 + 2$$

$$(x + 2)^2 + 2 = 0$$

$(x + 2)^2 = -2$ Gerçek kökü yok .

Ç.K = $\emptyset$

ÖRNEK:

$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

ÇÖZÜM:

Değişken değiştirerek çözelim

$x^2 = t$ diyelim. Denklem;

$t^2 + 2t - 3 = 0$ olur.

$$\begin{array}{ll} t & 3 \\ \underline{t} & \underline{-1} \\ \multicolumn{2}{c}{-t + 3t = 2t} \end{array}$$

$(t + 3)(t - 1) = 0$

$t + 3 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow x^2 = -3$ olur ki gerçek kök yoktur.

$t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$ veya $x_2 = -1$

Ç.K = { - 1 , 1 } olur.

ÖRNEK:

$2x^2 - 8x + 8 = 0$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

ÇÖZÜM:

Denklemi 2 parantezine alalım. $2(\underbrace{x^2 - 4x + 4}_{\text{Tam Kare}}) = 0$ dır.

$(x^2 - 4x + 4) = (x - 2)^2$ dir.

Buradan $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ olur. (Gerçek iki kök $x_1 = x_2 = 2$ dir.)

Ç.K = { 2 } olur.

$a \neq 0$ ve a, b , c $\in R$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $c = 0$ için denklem $ax + b = 0$ biçiminde yazılır ve ortak çarpan parantezine alma yöntemi kullanılarak çözüm kümesi bulunabilir.

ÖRNEK:

$4x^2 - x = 0$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

ÇÖZÜM:

$4x^2 - x = 0$

$x (4x - 1) = 0$

$x = 0$ veya $4x - 1 = 0$

$x = 0$ $\quad 4x = 1$

$x = \frac{1}{4}$

Ç.K = { 0 , = $\frac{1}{4}$ } olur.

$a \neq 0$ ve a, b , c $\in R$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde $b = 0$ için denklem $ax^2 + c = 0$ biçiminde yazılır Buradan $ax^2 = -c$ ve $x^2 = -\frac{c}{a}$ bulunur.

- $-\frac{c}{a} > 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin kökleri ,

  $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ veya $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$

- $-\frac{c}{a} < 0$ ise $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin gerçek kökleri yoktur.

  Ç.K = $\emptyset$ olur.

ÖRNEK:

$3x^2 - 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

ÇÖZÜM:

$3x^2 - 9 = 0$

$x^2 = \frac{9}{3}$ ($-\frac{-9}{3} > 0 \Rightarrow \frac{9}{3} > 0 \Rightarrow 3 > 0$ olduğundan iki gerçek kökü var.)

$x^2 = 3$

$x = \pm\sqrt{3}$ (İşaretleri farklı iki kök var.)

$x_1 = \sqrt{3}$ veya $x_2 = -\sqrt{3}$

Ç.K = { $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ } olur.

ÖRNEK:

$x^2 - 5 = 0$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x^2 - 5 = 0$

$x^2 = 5$

$x = \pm\sqrt{5}$ (İşaretleri farklı iki gerçek kök var.)

$x_1 = \sqrt{5}$ veya $x_2 = -\sqrt{5}$

Ç.K = $\{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$ olur.

ÖRNEK:

$4x^2 - 16 = 0$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

ÇÖZÜM:

$4x^2 - 16 = 0$

$4x^2 = 16$

$x^2 = 4$ ($4 = 2^2$, $4 = (-2)^2$ dir.)

$x_1 = 2$ veya $x_2 = -2$

Ç.K = $\{-2, 2\}$ olur.

ÖRNEK:

$x^2 + 9 = 0$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x^2 + 9 = 0$

$x^2 = -9$ olur ki , hiçbir gerçek sayının karesi negatif olamaz.

Ç.K = $\emptyset$ olur.

İkinci Dereceden Denklemleri Çözmek İçin Kullanılacak Formül

$a \neq 0$ ve a, b , c $\in R$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ denkleminin veren bağıntıda $b^2 - 4ac$ ifadesine denklemin diskriminantı denir ve Δ (Delta) ile gösterilir.

$ax^2 + bx + c = 0$ denkleminde ;

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ise, bu denklemin farklı iki gerçek kökü vardır.

  Bu kökler, $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ olur.

- $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ise, bu denklemin kökleri birbirine eşittir.(Çakışık iki kök var.)

  Bu kökler, $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$ olur.

- $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ise , bu denklemin gerçek kökleri yoktur. Denklemin R de çözüm kümesi boş kümedir. Ç.K = $\emptyset$ olur.

ÖRNEK:

$x^2 - x - 6 = 0$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x^2 - x - 6 = 0$ denkleminde;

a = 1 , b = -1 ve c = - 6 dır.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)$

$\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$

$\Delta > 0$ olduğundan iki gerçek kök vardır.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ olduğundan

$x_1 = \frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2.\ 1}$ ve $x_2 = \frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2.\ 1}$ olur.

$x_1 = \frac{1+5}{2}$ ve $x_2 = \frac{1-5}{2}$

$x_1 = \frac{6}{2}$ ve $x_2 = \frac{-4}{2}$

$x_1 = 3$ ve $x_2 = -2$

Ç.K = { - 2 , 3 } olur.

ÖRNEK:

$4x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminin çözüm kümesini gerçek sayılar kümesinde bulunuz.

ÇÖZÜM:

$4x^2 - 4x + 1 = 0$ denkleminde;

a = 4 , b = - 4 ve c = 1 dir.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$

$\Delta = 16 - 16 = 0$

$\Delta = 0$ olduğundan iki gerçek kök var ve eşit. (Kökler çakışık)

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \quad \frac{-(-4)}{2.\ 4} = \frac{4}{2.\ 4} = \frac{1}{2}$ olur.

Ç.K = { $\frac{1}{2}$ } olur.

ÖRNEK:

Aşağıdaki denklemlerin gerçek sayılar kümesindeki çözüm kümelerini bulunuz..

a) $x^2 - 2x - 15 = 0$

b) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

d) $x^2 - x + 1 = 0$

ÇÖZÜM:

a) $x^2 - 2x - 15 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)$

$\Delta = 4 + 60 = 64 = 8^2$

$\Delta > 0$ olduğundan iki gerçek kök vardır.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ olduğundan

$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{64}}{2.\ 1}$ ve $x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{64}}{2.\ 1}$ olur.

$x_1 = \frac{2+8}{2}$ ve $x_2 = \frac{2-8}{2}$

$x_1 = \frac{10}{2}$ ve $x_2 = \frac{-6}{2}$

$x_1 = 5$ ve $x_2 = -3$

Ç.K = $\{-3, 5\}$ olur.

b) $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6$

$\Delta = 49 - 48 = 1 = 1^2$

$\Delta > 0$ olduğundan iki gerçek kök vardır.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ olduğundan

$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{1}}{2.\ 2}$ ve $x_2 = \frac{-(-7)-\sqrt{1}}{2.\ 1}$ olur.

$x_1 = \frac{7+1}{4}$ ve $x_2 = \frac{7-1}{4}$

$x_1 = \frac{8}{4}$ ve $x_2 = \frac{9}{4}$

$x_1 = 2$ ve $x_2 = \frac{3}{2}$

Ç.K = $\{ \frac{3}{2}, 2 \}$ olur.

c) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-12)^2 - 4 . 4 . 9$

$\Delta = 144 - 144 = 0$

$\Delta = 0$ olduğundan iki gerçek kök var ve eşit. (Kökler çakışık)

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} \quad \frac{-(-12)}{2.\ 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ olur.

Ç.K = $\{ \frac{3}{2} \}$ olur.

d) $x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-1)^2 - 4 . 1 . 1$

$\Delta = 1 - 4 = -3$

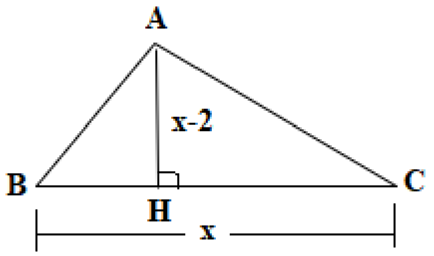
$\Delta < 0$ olduğundan iki gerçek kök yoktur.

Ç.K = $\emptyset$ olur.

ÖRNEK:

Bir ABC üçgeninde A köşesinden |BC| kenarına çizilen yükseklik |BC| kenar uzunluğundan 2 cm kısadır. Üçgenin alanı 12 cm^2 olduğuna göre, |BC| uzunluğunu bulunuz.

ÇÖZÜM:



$A(ABC) = \frac{|BC| . |AH|}{2}$ dır.

$12 = \frac{x\ (x-2)}{2}$

$x(x-2) = 24$

$x^2 - 2x = 24$

$x^2 - 2x - 24 = 0$ bulunur.

$x^2 - 2x - 24 = 0$ denklemini çözelim.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)$

$\Delta = 4 + 96 = 100 = 10^2$

$\Delta > 0$ olduğundan iki gerçek kök vardır.

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ve $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ olduğundan

$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{100}}{2.\ 1}$ ve $x_2 = \frac{-(-2)-\sqrt{100}}{2.\ 1}$ olur.

$x_1 = \frac{2+10}{2}$ ve $x_2 = \frac{2-10}{2}$

$x_1 = \frac{12}{2}$ ve $x_2 = \frac{-8}{2}$

$x_1 = 6$ ve $\cancel{x_2 = -4}$ (Uzunluklar negatif olamaz.)

$|BC| = 6$ cm olur.

ÖRNEK:

$m \in R$ olmak üzere, $x^2 - 4x = m + 3$ denkleminin farklı iki gerçek kökü olduğuna göre, m değer aralığını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x^2 - 4x = m + 3$ denkleminde ;

$x^2 - 4x - m - 3 = 0$ yazalım . Katsayıları ; $a = 1$, $b = -4$ ve $c = -m - 3$ tür.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m - 3)$

$\Delta = 16 + 4m + 3$

$\Delta = 4m + 19$

$4m + 19 > 0$ olmalıdır.

$4m > -19$

$m > \frac{19}{2}$ bulunur.

Burada m nin değer aralığı $(\frac{19}{2}, \infty)$ olur.

ÖRNEK:

$m \in R$ olmak üzere, $x^2 = -mx + 2x - m$ denkleminin çakışık iki kökü olabilmesi için m nin alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM:

$x^2 = -mx + 2x - m$ denklemini düzenleyelim.

$x^2 + mx - 2x + m = 0$

$x^2 + (m - 2)x + m = 0$

Kökler çakışık olacağından $\Delta = 0$ olmalıdır.

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = [-(m - 2)]^2 - 4 . 1 . m$

$\Delta = (m - 2)^2 - 4m = 0$

$(m - 2)^2 - 4m = 0$

$m^2 - 4m + 4 - 4m = 0$

$m^2 - 8m + 4 = 0$

$(m - 2)^2 = 0$

$m - 2 = 0$

$m = 2$ olur.

ÖRNEK:

$m \in R$ olmak üzere, $x^2 + (m - 3)x + m + 12 = 0$ denklemin bir kökü 3 olduğuna göre, m nin alabileceği değerleri bulunuz.

ÇÖZÜM:

Denklemin bir kökü 3 olduğundan bu 3 değeri denklemi sağlar.

$x^2 + (m - 3)x + m + 12 = 0$ denkleminde $x = 3$ yazalım.

$(3^2) + (m - 3) . 3 + m + 12 = 0$

$\cancel{9} + 3m - \cancel{9} + m + 12 = 0$

$4m + 12 = 0$

$4m = -12$

$m = -3$ olur.