Sıfır Polinomu

$P(x) = 0$ ise, bu polinoma sıfır polinomu denir. Sıfır polinomunun derecesi belirsizdir.

ÖRNEK:

m , n ve k gerçek sayılar olmak üzere , $R(x) = (m + 3) x^2 – (2 - n) x + 5k - 15$ polinomu sıfır polinomu olduğuna göre, m .n + k değerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

R(x) sıfır polinomu olduğundan x^2 ve x in katsayıları ve sabiti 0 olur.

$m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3$

$2 – n = 0 \Rightarrow n = 2$

$5k – 15 = 0 \Rightarrow 5k = 15 \Rightarrow k = 3$

Buradan $m . n + k = -3 + 2 + 3 = 2$ olur.

Polinomlarda Toplama ,Çıkarma , Çarpma ve Bölme İşlemleri

Polinomlarda Toplama ,Çıkarma İşlemleri

Polinomlarda toplama ve çıkarma işlemleri yapılırken dereceleri aynı olan terimler toplanır ya da çıkarılır.

Örneğin; $a,b \in R$ ve $m \in N$ için,

P(x) polinomuna ait olan bir terimi $a . x^m$,

Q(x) polinomuna ait olan bir terimi $b . x^m$ ise,

$a . x^m + b . x^m = (a + b) . x^m$ terimi P(x) + Q(x) polinomunun bir terimidir.

$a . x^m - b . x^m = (a – b) . x^m$ terimi P(x) - Q(x) polinomunun bir terimidir.

ÖRNEK:

$P(x) = 2x^3 - 4x^2 + 5x – 3$ ve $Q(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x + 9$ polinomları veriliyor.

a) P(x) + Q(x) ,
b) P(x) + Q(x) ,
c) 4 .P(x) - 5 .Q(x) işlemlerinin sonucunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

a) $P(x) + Q(x) = (2x^3 - 4x^2 + 5x – 3) + (4x^3 + 6x^2 - 2x + 9)$
$= (2 + 4) x^3 + (- 4 + 6) x^2 + (5 – 2) x + (- 3 + 9)$
$= 6 x^3 + 2x^2 + 3x + 6$ olur.

b) $P(x) - Q(x) = (2x^3 - 4x^2 + 5x – 3) - (4x^3 + 6x^2 - 2x + 9)$
$= (2 - 4) x^3 + (- 4 - 6) x^2 + (5 –(- 2)) x + (- 3 - 9)$
$= - 2x^3 – 10 x^2 + 7x - 9$ olur.

c) $4 .P(x) - 5 .Q(x) = 4 .(2x^3 - 4x^2 + 5x - 3) - 5. (4x^3 + 6x^2 - 2x + 9)$
$= (4.2x^3 - 4.4x^2 + 4.5x - 4.3) - (5.4x^3 + 5.6x^2 - 5.2x + 5.9)$
$= (8x^3 - 16x^2 + 20x - 12) - (20x^3 + 30x^2 - 10x + 45)$
$= (8- 20)x^3 -(16 - 20)x^2 + (20 - 10) x - (12 - 45)$
$= - 12x^3 - (- 4)x^2 + 10 x - (- 33)$
$= - 12x^3 + 4 x^2 + 10 x + 33$ olur.

ÖRNEK:

Yandaki şekilde, dikdörtgen biçimindeki bir arsanın kenar uzunlukları,
$|AB| = 2x^2 + x + 5$
$|CD| = x^2 + 3x + 1$ metredir.
Bu arsanın çevresini bulunuz.

ÇÖZÜM:

Bir dikdörtgenin çevresi uzun kenarı ile kısa kenarının uzunlukları toplamının iki katına eşittir.

$2. (|AB| + |CD|) = 2 .[(2x^2 + x + 5) + (x^2 + 3x + 1)]$
$= 2(3x^2 + 4x + 6)$
$= 2 . 3x^2 + 2 .4x + 2. 6$
$= 6x^2 + 8x + 12$ metre olur.

ÖRNEK:

P(x) bir polinom olmak üzere, $P(x) + P(x - 1) = 6x^2 +2 x + 8$ olduğuna göre

P(3) değerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$3x^2 + x + 7$ ifadesi 2 . dereceden bir ifadedir. P(x) ve P(x – 1) polinomları

ikinci derece olmaları gerekir. Öyleyse;

$P(x) = ax^2 +b x + c$ ve x yerine x- 1 yazılırsa ,

$P(x - 1) = a (x - 1)^2 + b (x - 1) + c$ olur.

$ax^2 + b x + c + [a (x - 1)^2 + b (x - 1) + c] = 6x^2 +2x + 8$

$ax^2 +b x + c + a (x^2 - 2x + 1) + bx - b + c) = 6x^2 +2x + 8$

$ax^2 +b x + c + ax^2 - 2ax + a + bx - b + c = 6x^2 + 2x + 8$

$2ax^2 + (2a +2 b) x + a - b + 2 c = 6x^2 + 2x + 8$

$2ax^2 = 6x^2 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3$ olur.

$(2a +2 b) x = 2x \Rightarrow 2a + 2b = 2 \Rightarrow 2 . 3 + 2b = 2 \Rightarrow 2b = 2 - 6 \Rightarrow b = - 4$ olur.

$a - b + 2c = 7 \Rightarrow 6 - (-4) + 2 c = 6 + 4 + 2c = 7 \Rightarrow 10 + 2c = 7 \Rightarrow 2c = 8 - 10$

$2c = -2 \Rightarrow c = -1$ olur.

Bulduğumuz a = 3 , b = - 4 ve c = 1 değerlerini, $P(x) = ax^2 + bx + c$ polinomunda yerlerine yazarsak, $P(x) = 3x^2 - 4x - 1$ olur.

Buradan $P(3) = 3 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 - 1 = 3 \cdot 9 - 12 - 1 = 27 - 13 = 14$ olur.

Polinomlarda Çarpma İşlemi

P(x) ve Q(x) iki polinom olsun. P(x) **.** Q(x) polinomları çarpılırken P(x) in her terimi Q(x) in her terimi ile sırasıyla çarpılır, elde edilen cebirsel toplam x değişkenin azalan ya da artan kuvvetlerine göre yazılır.

Örneğin;

P(x) polinomunun bir terimi $a \cdot x^m$ ve Q(x) polinomunu bir terimi $b \cdot x^n$ ise, $a \cdot x^m \cdot b \cdot x^n = a.b.\, x^{m+n}$ terimi P(x) **.** Q(x) in bir terimidir.

ÖRNEK:

$P(x) = x^2 + x + 1$ ve $Q(x) = x + 1$ olarak veriliyor. P(x) **.** Q(x) çarpımı R(x) olduğuna göre , R(x) polinomunu ve derecesini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$R(x) = P(x) \cdot Q(x) = (x^2 + x + 1)(x + 1)$

$R(x) = x^2 \cdot x + x^2 \cdot 1 + x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1$

$R(x) = x^3 + x^2 + x^2 + 2x + 1$

$R(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ olur.

der [R(x)] = 3 olur.

$P(x) \neq 0$ ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere,

$$\left.\begin{array}{l} \text{der}\,[\,P(x)\,] = m \\ \text{der}\,[\,Q(x)\,] = n \end{array}\right\} \text{der}\,[(P(x) \cdot Q(x)] = m + n \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$P(x) = -x^3 + 2x^2 + 3x - 5$ polinomu veriliyor. $P^2(x)$ polinomunun x^5li terimin katsayısını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$P^2(x) = P(x) \cdot P(x)$ tir.

$$P^2(x) = (-x^3 + 2x^2 + 3x - 5)\,(-x^3 + 2x^2 + 3x - 5)$$

$- 2x^5$

$- 2x^5$

x^5 li terimleri çarpalım. $-x^3 \cdot 2x^2 + 2x^2 \cdot (-x^3) = -2x^{3+2} - 2x^{2+3} = -4x^5$

$P^2(x)$ polinomunun katsayıları toplamı – 4 tür.

Polinomlarda Bölme İşlemi

$P(x)$ ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere, der[$P(x)$] $\geq$ der[$Q(x)$] ≥ 1 ise, $P(x)$ polinomunun $Q(x)$ polinomuna bölümünde;

$$\begin{array}{r|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} \underline{-\ B(x) \cdot Q(x)} & B(x) \\ K(x) & \end{array}$$

$P(x)$: Bölünen polinom,
$Q(x)$: Bölen polinom,
$B(x)$: Bölüm polinomu,
$K(x)$: Kalan polinomudur.

Bölmede:

- $P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ dır. Buna bölme eşitliği denir.
- $K(x) = 0$ ise, $P(x)$ polinomu $Q(x)$ polinomuna tam (kalansız) bölünür.
- der [$K(x)$] $\leq$ der [$Q(x)$] olur.
- der[$B(x)$] = der [$P(x)$] – der[$Q(x)$] olur

ÖRNEK:

$P(x)$ polinomu $Q(x) = x + 2$ polinomuna bölündüğünde bölüm $2x$ ve kalan 4 olduğuna göre, $P(x)$ polinomunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ (Bölme eşitliği.) olduğundan,

$P(x) = [\ (x \cdot 2x) + (2 \cdot 2x)] + 4$

$P(x) = 2x^2 + 4x + 4$ olur.

ÖRNEK:

$P(x) = x^2 - 1$ polinomu ve $Q(x) = x - 1$ polinomları veriliyor. $P(x)$ in $Q(x)$ e bölümünde $B(x)$ ve $K(x)$ i bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2} - 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-\ \cancel{\pm x^2} \mp x} & x + 1 \\ \cancel{x} - \cancel{1} & \\ \underline{-\ \cancel{\pm x} \mp \cancel{1}} & \\ 0 & \end{array}$$

$P(x) = Q(x) \cdot B(x) + K(x)$ olduğundan

$x^2 - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1) + 0$ olur.

$B(x) = x + 1$ ve $K(x) = 0$ bulunur. Tam bölünür.

x ile $x - 1$ çarpıldığında $x^2 - x$ bulunur.

$+1$ ile $x - 1$ çarpıldığında $x - 1$ bulunur.

Polinomlarda bölme işlemi yaparken,

- Bölünen ve bölen polinomlar değişkeni en büyük dereceden azalan kuvvetlere göre yazılmalıdır.
- Bölme işlemine bölünenin en büyük dereceli teriminden başlanır ve bölen polinomunun en büyük dereceli terimine bölünebilecek biçimde uygun dereceli bir terim yazılır.
- Yazılan terim bölen polinomun terimleri ile çarpılır, sonuç bölünen polinomdan çıkarılır.
- Bölme işlemi çıkarma işlemi sonucunda oluşan her polinoma uygulanır.
- Bölmeye kalanın derecesi bölenin derecesinden küçük oluncaya devan edilir

ÖRNEK:

$P(x) = 4x^3 – 3x^2 + x + 2$ polinomu ve $Q(x) = x + 1$ polinomuna bölündüğünde bölüm ve kalanını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{4x^3} - 3x^2 + x + 2 & x + 1 \\ \cline{2-2}
\overset{+}{-}\,\overset{-}{}\cancel{4x^3} \overset{-}{+} 4x^2 \quad & 4x^2 - 7x + 8 \\ \cline{1-1}
\cancel{-7x^2} + x + 2 & \\
\overset{+}{-}\ \overset{+}{-}\cancel{7x^2}\ \overset{+}{-}7x & \\ \cline{1-1}
\cancel{-8x} + 2 & \\
\overset{+}{-}\ -\cancel{8x}\ \overset{-}{+}8 & \\ \cline{1-1}
-6 &
\end{array}
$$

$4x^2$ ile $x + 1$ çarpıldı.

$-7x$ ile $x + 1$ çarpıldı.

$+8$ ile $x + 1$ çarpıldı.

$P(x) = Q(x) . B(x) + K(x)$

$P(x) = (x + 1) . (4x^2 - 7x + 8) - 6$

(Çıkarma işlemi yapılırken işaret değiştirilir.Terimler toplanır.)

ÖRNEK:

$m \in R$ olmak üzere $(x - 2) . P(x) = x^3 - 2x^2 - mx - 4$ eşitliğini sağlayan $P(x)$ polinomunu bulunuz.

ÇÖZÜM:

$(x – 2) . P(x) = x^3 - 2x^2 + mx - 4$ eşitliğinde x yerine 2 yazılırsa,

$(2 – 2) . P(x) = 2^3 - 2. 2^2 + m .2 – 4$

$0 . P(x) = 8 - 2 . 4 + 2 m – 4$

$0 = 8 - 8 + 2m – 4$

$0 = 2m – 4$

$2 m = 4 \Rightarrow m = 2$ olur.

Bulduğumuz m değerini verilen eşitlikte yerine yazıp eşitliğin her iki tarafını $x - 2$ ye bölelim.

$$\frac{\cancel{(x-2)} \,.\, P(x)}{\cancel{(x-2)}} = \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}{(x-2)}$$

$$P(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}{(x-2)} \text{ olur.}$$

Bölme işlemini yapalım.

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3} - \cancel{2x^2} + 2x - 4 & x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{\mp \cancel{x^3} \pm \cancel{2x^2}} & x^2 + 2 \\ \cancel{2x} - \cancel{4} & \\ \underline{\mp \cancel{2x} \pm \cancel{4}} & \\ 0 & \end{array}$$

$P(x) = x^2 + 2$ olur.

ÖRNEK:

$P(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 2$ polinomunun ve $Q(x) = x + 1$ polinomu ile bölümünden bulunan kalanı ,bölüm polinomunu bulmadan bulunuz.

ÇÖZÜM:

$K(x)$ polinomunu bölme yapmadan bulmamız isteniyor.

$P(x) = Q(x) \,.\, B(x) + K(x)$ dir.

$Der[\,K(x)] < der[\,Q(x)\,]$ olacağı için, $K(x) = c$ olur. ($c \in R$)

$P(x) = (x + 1) \,.\, B(x) + c$ eşitliğinde x yerine -1 yazalım.

$P(x) = (-1 + 1) \,.\, B(-1) + c$

$P(-1) = c$ bulunur.

$P(-1) = 4(-1)^3 - 3(-1)^2 - 1 + 2$

$P(-1) = 4 \,.\, (-1) - 3 - 1 + 2$

$P(-1) = -4 - 3 - 1 + 2$

$P(-1) = -6$ olur.

ÖRNEK:

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ polinomunun çarpanlarından biri $x - 1$ olduğunu gösteriniz ve P(x) polinomunun $(x – 1)$ ile bölümündeki kalanı bulunuz.

ÇÖZÜM:

Özetlersek,

- Bir P(x) polinomunda x – a ile bölümündeki kalan p(a) dır.
- $P(a) = 0 \Leftrightarrow (x – a)$, P(x) polinomunun bir çarpanıdır.
- x = a için, P(a) = 0 sayısına P(x) polinomunun sıfırı (bir kökü) denir.

Örneğimize devam edelim.

$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$ polinomunun çarpanı $x – 1$ ise ,

“$P(1) = 0 \Leftrightarrow (x – 1)$, P(x) in bir çarpanıdır.” Önermesi biçiminde yazabiliriz.

$P(1) = 1^3 + 2 . 1^2 – 5 . 1 + 2$

$P(1) = 1 + 2 – 5 + 2$

$P(1) = 0$ bulunur.

Öyleyse, $P(x) = (x – 1)(x^2 + 3x – 2)$ olur. Tam bölünüyor.

P(1) = 0 ise , (x – 1) , P(x) polinomunu bir çarpanıdır.

Polinomların Çarpanlara Ayrılması

Bir Polinomu Çarpanlara Ayırma

Bir polinomun iki ya da daha fazla polinomun çarpımı biçiminde yazılmasına polinomu **çarpanlara ayırma** denir.

P(x) , Q(x) ve R(x) polinomları için , R(x) = P(x) . Q(x) biçimindeki bir ifadede P(x) ve Q(x) e **R(x) polinomunun çarpanları** denir.

Çarpanlara Ayırma Yöntemleri

Ortak Çarpan Parantezine Alma

Bir polinomda bulunan terimler içersindeki ortak çarpanı paranteze alarak yazılması işlemine ortak çarpan parantezine alma yoluyla çarpanlara ayırma denir.

A(x) , B(x) ve C(x) birer polinom olmak üzere;

$A(x) . B(x) + A(x) . C(x) = A(x) . [B(x) . C(x)]$ dir.

ÖRNEK:

Aşağıda verilen ifadeleri ortak çarpan parantezine alınız.

a) $a, b, c \in R$ için, $ax + bx - cx$
b) $2x^2 + 8x$
c) $m^4 + m^2 - m$

ÇÖZÜM:

a) x ler ortaktır, x parantezine alırız.

$ax + bx - cx = x(a + b - c)$ olur.

b) 2x ler ortaktır, 2x parantezine alırız.

$2x^2 + 8x = 2x(1 + 4x)$ olur.

c) m ler ortaktır, m parantezine alırız.

$m^4 + m^2 - m = m(m^3 + m - 1)$ olur.

ÖRNEK:

$a, b \in R$ için, $a.(3 - x) + b.(x - 3)$ ifadesini çarpanlara ayırınız.

ÇÖZÜM:

$$a.(3 - x) + b.(x - 3) = a.[-(x - 3)] + b.(x - 3)$$
$$= -a.(x - 3) + b.(x - 3)$$
$$= (x - 3).(-a + b) = (x - 3).(b - a) \text{ olur.}$$

$[(3 - x) = -(x - 3)$ tür.$]$

ÖRNEK:

$(x + 2)^3 - (x + 2)^2$ ifadesini çarpanlara ayırınız.

ÇÖZÜM:

$(x + 2)^2$ ifadesi her iki terimde de ortak olduğundan $(x + 2)^2$ ortak parantezine alırız.

$$(x + 2)^3 - (x + 2)^2 = (x + 2)^2.(x + 2 - 1)$$
$$= (x + 2)^2.(x + 1) \text{ olur.}$$

Gruplandırma Yöntemi ile Çarpanlara Ayırma

Bir polinom terimlerinin ortak bir sayısı,ortak bir değişkeni veya ortak bir terimi bulunmuyorsa, ortak çarpanı olan terimler bir araya getirilerek gruplandırılır.Her grup ortak aynı paranteze alınacak biçimde(parantez içindeki terimler aynı olacak biçimde) çarpanlara ayrılır. Daha sonra ortak çarpan parantezine alınır.

ÖRNEK:

$a^4 - a^3 + a^2 - a$ ifadesini çarpanlara ayıralım.

ÇÖZÜM:

$a^4 - a^3 + a^2 - a$ ifadesinde ilk iki terimi a^3 parantezine , son iki terimi de a parantezine alalım.

$a^4 - a^3 + a^2 - a = a^3 . (a - 1) + a . (a - 1)$

$= (a - 1) . (a^3 + a)$ olur. Burada $a^3 + a$ çarpanı da a parantezine alınır. $a^3 + a = a (a^2 + 1)$ dir.

$a^4 - a^3 + a^2 - a = (a - 1) . (a^3 + a)$

$= (a - 1) . a . (a^2 + 1)$

$= a . (a - 1) . (a^2 + 1)$ olur.

Çarpanlara ayırılacak terim kalmayana kadar çarpanlara ayırma işlemine devam edilir.

Özdeşlikler yardımıyla Çarpanlara Ayırma

Tam Kare Özdeşliği

1. $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,
2. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ biçimindeki ifadeler **tam kare özdeşliğidir.**

$(x + y)^2 = (x + y). (x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^2 = (x - y). (x - y) = x^2 - xy - xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$

ÖRNEK:

Aşağıda tam kare olarak verilen ifadelerin açılımlarını bulunuz.

a) $(x - 2)^2$ b) $(2x + 1)^2$ c) $(2a - 3)^2$

ÇÖZÜM:

a) $(x - 2)^2 = x^2 - 2 . 2x + 4 = x^2 - 4x + 4$ olur.

b) $(2x + 1)^2 = (2x)^2 + 2 . 2x + 1^2 = 4x^2 + 4x + 1$ olur.

c) $(2a - 3)^2 = (2a)^2 - 2 . 3a + (-3)^2 = 4a^2 - 6a + 9$ olur.

Tam kare ifadenin açılımı yapılırken,

- Birinci terimin karesi alınır.
- Birinci terim ile ikinci terim çarpılır, iki katı alınır.
- İkinci terimin karesi alınır.
- Yukarıda yapılan işlemler toplanır.
  (Terimlerin önündeki + veya – işareti terime aittir.)

İki Kare Farkı Özdeşliği

$x^2 - y^2$ ifadesi iki kare farkı biçimindedir.

$x^2 - y^2 = (x - y) . (x + y)$ dir.

ÖRNEK:

Aşağıda iki kare farkı olarak verilen ifadeleri çarpanlarına ayırınız.

a) $x^2 - 4$ b) $4x^2 - 9$ c) $16 - a^2$ d) $x^2 - 3$

ÇÖZÜM:

a) $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2) . (x + 2)$ olur.

b) $4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3) . (2x + 3)$ olur.

c) $16 - a^2 = 4^2 - a^2 = (4 - a) . (4 + a)$ olur.

d) $x^2 - 3 = x^2 - (\sqrt{3})^2 = (x - \sqrt{3}) . (x + \sqrt{3})$ olur.

ÖRNEK:

$15^2 - 12^2$ ifadesinin sonucunu iki kare farkı özdeşliğini kullanarak bulunuz.

ÇÖZÜM:

$15^2 - 12^2 = (15 - 12) . (15 + 12) = 3 . 27 = 81$ olur.

ÖRNEK:

$25^2 - 15^2 = 50 . m$ eşitliğinde iki kare farkı özdeşliğini kullanarak m değerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

$25^2 - 15^2 = (25 - 15) . (25 + 15) = 10 . 40 = 400$ olur.

$400 = 50 . m$

$m = 8$ olur.

İki Terimin Toplamının ve Farkının Küpü Özdeşliği

1. $(x + y)^3 = (x + y) . (x + y) . (x + y)$

$= (x + y) . (x + y)^2$

$= (x + y) . (x^2 + 2xy + y^2) = x^3 + 2xy + xy^2 + x^2 y + 2xy^2 + y^3$

$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$ olur.

2. $(x - y)^3 = (x - y) . (x - y) . (x - y)$

$= (x - y) . (x - y)^2$

$= (x - y) . (x^2 - 2xy + y^2) = x^3 - 2x^2 y + xy^2 - x^2 y + 2xy^2 - y^3$

$(x + y)^3 = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3$ olur.

ÖRNEK:

Aşağıda iki terimin küpü olarak verilen ifadelerin açılımlarını özdeşlik kullanarak yapınız.

a) $(x + 1)^3$ b) $(x - 2)^3$ c) $(2x - 3)^3$ d) $(1 + 2a)^3$

ÇÖZÜM:

a) $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 .1 + 3x . 1^2 + 1^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ olur.

b) $(x - 2)^3 = x^3 - 3x^2 . 2 + 3x . (-2)^2 + (-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 6x - 8$ olur.

c) $(2x - 3)^3 = (2x)^3 - 3 . 2 . x^2 + 3 . 2^2 . x - 3^3 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 27$ olur.

d) $(1 + 2a)^3 = 1^3 + 3 .1^2 .2a + 3. 1. (2a)^2 + (2a)^3 = 1 + 6a + 12a^2 + 8a^3$ olur.

İki Terimin Küplerinin Toplamı ve Farkının Özdeşliği

1. $x^3 + y^3 = (x + y) . (x^2 - xy + y^2)$ iki terimin küpleri toplamıdır.
2. $x^3 - y^3 = (x - y) . (x^2 + xy + y^2)$ iki terimin küpleri farkıdır.

ÖRNEK:

Aşağıda iki terimin küpler toplamı veya farkı olarak verilen ifadeleri çarpanlara ayırınız.

a) $x^3 + 2^3$ b) $8x^3 - 27$ c) $a^3 + 75$

ÇÖZÜM:

a) $x^3 + 2^3 = (x + 2) . (x^2 - 2x + 4)$ olur.

b) $8x^3 - 27 = 2x^3 - 3^3 = (2x - 3) . [(2x)^2 + 2x . 3 + 3^2)$

$= (2x - 3) . (4x^2 + 6x + 9)$ olur.

c) $a^3 + 75 = a^3 + 5^3 = (a + 5) . (a^2 - 5a + 5^2)$

$= (a + 5) . (a^2 - 5a + 25)$ olur.

$ax^2 + bx + c$ Biçimindeki İfadelerin Çarpanlara Ayrılması

$a \neq 0$ ve a , b, c ve $x \in R$ olmak üzere ,
$ax^2 + bx + c$ biçimindeki üç terimli bir ifadeyi çarpanlarına ayırırken
a ve c nin çarpanlarına bakılır. $a = k .t$ için , $ax^2 = kx . tx.$ ve $c = m . n$
olacak biçimde düzenleme yapılır.

$$\begin{array}{ccc} ax^2 & + bx + & c \\ \downarrow & & \downarrow \\ kx & & m \\ & \times & \\ tx & & n \end{array}$$

Çapraz çarpım gerçekleşiyorsa,

$ax^2 + bx + c = (kx + m)(tx + n)$ biçiminde çarpanlara ayrılır.

ÖRNEK:

$x^2 - 5x + 6$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

ÇÖZÜM:

$x^2 - 5x + 6$

$x \quad -2$

$x \quad -3$

$x^2 = x \,.\, x$ ve $6 = (-2) \,.\, (-3)$ tür. Çapraz çarpıma göre,

$(-3x) + (-2x) = -5x$ olur. (Ortadaki terimi veriyor.)

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ olur.

ÖRNEK:

$2x^2 + 5x - 3$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

ÇÖZÜM:

$2x^2 + 5x - 3$

$2x \quad -1$

$x \quad 3$

$2x^2 = 2x \,.\, x$ ve $-3 = (-1) \,.$ tür. Çapraz çarpıma göre,

$6x + (-x) = 5x$ olur. (Ortadaki terimi veriyor.)

$2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$ olur.

ÖRNEK:

$6x^2 - 14x + 4$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

ÇÖZÜM:

$6x^2 - 14x + 4$

$3x \quad -1$

$2x \quad -4$

$6x^2 = 3x \,.\, 2x$ ve $4 = (-1) \,.\, (-4)$ tür. Çapraz çarpıma göre,

$-12x + (-2x) = -14x$ olur. (Ortadaki terimi veriyor.)

$6x^2 - 14x + 4 = (3x - 1)(2x - 1)$ olur.

Değişken Değiştirme Yöntemi ile Çarpanlara Ayırma

Bir polinomda benzer terimler yeni değişkenle adlandırılıp sade biçime getirilir. Sade hale getirilen polinomun çarpanlara ayrılmasına değişken değiştirerek çarpanlara ayırma yöntemi denir.

ÖRNEK:

$x^4 - 5x^2 + 4$ polinomunu çarpanlara ayırınız.

ÇÖZÜM:

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2)^2 - 5x^2 + 4$ polinomunda $x^2 = a$ diyelim.
Polinom $a^2 - 5a + 4$ olur.

$$\begin{array}{ll} a & -1 \\ a & -4 \end{array}$$

$a^2 - 5a + 4 = (a-1).(a-4)$ olur. a yerine x^2 yazalım.
$x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2-1).(x^2-4)$
$x^4 - 5x^2 + 4 = (x-1).(x+1).(x-2).(x+2)$ olur.

ÖRNEK:

$\sqrt{82\,.\,88 + 9}$ ifadesinin değerini bulunuz.

ÇÖZÜM:

x = 82 diyelim. $\sqrt{82\,.\,88 + 9} = \sqrt{x\,.(x+6)+9}$ yazılır.

Karekök içindeki işlemi yapalım.

$\sqrt{x^2 + 6x + 9} = \sqrt{(x+3)^2} = |x+3|$ olur.

$|x+3|$ ifadesinde x = 82 yazılırsa, 82 + 3 = 85 bulunur.

$\sqrt{82\,.\,88 + 9} = 85$ olur.

Rasyonel İfadelerin Sadeleştirilmesi

P(x) ve Q(x) iki polinom ve $Q(x) \neq 0$ olmak üzere; $\frac{P(X)}{Q(X)}$ biçimindeki ifadelere **rasyonel ifadeler** denir.

Rasyonel ifadelerde toplama, çıkarma, çarpma ve bölme işlemleri rasyonel sayılarda olduğu gibi yapılır.

Rasyonel ifadelerde pay ve paydada çarpanlara ayırma varsa önce çarpanlara ayırma yapılır. Çarpanlar sadeleştirilir.

ÖRNEK:

$\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 3x + 2}$ ifadesini en sade hale getiriniz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x-5)\cancel{(x+2)}}{(x+1)\cancel{(x+2)}} = \frac{x-5}{x+1}$$

Parantezler çarpılırken araya (**.**) **NOKTA** işareti yazılmayabilir.

ÖRNEK:

$\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}$ ifadesini en sade hale getiriniz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}=\frac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\frac{x+3}{x+1} \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$\frac{3a^2-27a}{a^2-9}$ ifadesini en sade hale getiriniz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{3a^2-27a}{a^2-9}=\frac{3\cancel{(a^2-9)}}{\cancel{a^2-9}}=3 \text{ olur.}$$

ÖRNEK:

$\frac{x^3-3x-x+3}{x^2-2x-3}$ ifadesini en sade hale getiriniz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{x^3-3x-x+3}{x^2-2x-3}=\frac{x^2(x-3)-(x-3)}{x^2-2x-3}=\frac{(x-3)(x^2-1)}{x^2-2x-3}$$

$$\frac{x^3-3x-x+3}{x^2-2x-3}=\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(x+1)}}=x-1 \text{ olur.}$$

Rasyonel ifadelerde Toplama ve Çıkarma İşlemleri

$Q(x) \neq 0$, $T(x) \neq 0$ için, $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ve $\frac{R(x)}{T(x)}$ birer rasyonel ifade olmak üzere,

1. Toplama işlemi ,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}+\frac{R(x)}{T(x)}=\frac{P(x)\cdot T(x)+R(x)\cdot Q(x)}{Q(x)\,.\,T(x)} \text{ biçiminde yapılır.}$$

2. Çıkarma işlemi,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}-\frac{R(x)}{T(x)}=\frac{P(x)\,.\,T(x)-R(x)\,.\,Q(x)}{Q(x)\ \ T(x)} \text{ biçiminde yapılır.}$$

ÖRNEK:

$$\frac{x^2-2x}{x^2+x-6} - \frac{2x^2+3x+1}{2x^2-3x-2}$$ ifadesini en sade hale getiriniz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{x^2-2x}{x^2+x-6} - \frac{2x^2+3x+1}{2x^2-3x-2} = \frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)} - \frac{\cancel{(2x+1)}(x+1)}{\cancel{(2x+1)}(x-2)}$$

$$= \underset{(x-2)}{\frac{x}{x+3}} - \underset{(x+3)}{\frac{x+1}{x-2}} = \frac{x(x-2) - (x+1)(x+3)}{(x-2)(x+3)}$$

$$= \frac{x^2-2-(x^2+4x+3)}{x^2+x-6} = \frac{\cancel{x^2}-2-\cancel{x^2}-4x-3}{x^2+x-6} = \frac{-4x-5}{x^2+x-6}$$ olur.

ÖRNEK:

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$$ eşitliğini sağlayan A ve B gerçek sayılarını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)} = \underset{(x+3)}{\frac{A}{x-1}} + \underset{(x-1)}{\frac{B}{x+3}} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$\frac{3x+5}{(x-1)(x+3)} = \frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

$$3x+5 = Ax+3A+Bx-B$$
$$3x+5 = (A+B)x+3A-B$$

$(A+B)x = 2x$ ve $3A-B = 5$ olur.

$$\begin{array}{r} A+B=3 \\ +\ 3A-B=5 \\ \hline 3A+A=3+5 \\ 4A=8 \\ A=2 \end{array} \quad \rightarrow \quad A+B=3 \Rightarrow 2+B=3 \Rightarrow B=1 \text{ olur.}$$

Rasyonel ifadelerde Çarpma ve Bölme İşlemleri

$Q(x) \neq 0$, $T(x) \neq 0$ için, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ ve $\dfrac{R(x)}{T(x)}$ birer rasyonel ifade olmak üzere,

1. Çarpma işlemi,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{T(x)} = \frac{P(x) \,.\, R(x)}{Q(x) \,.\, T(x)}$$ biçiminde yapılır.

2. Bölme işlemi,

$$\frac{P(x)}{Q(x)} : \frac{R(x)}{T(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{T(x)}{R(x)} = \frac{P(x) \,.\, T(x)}{Q(x) \,.\, R(x)}$$ biçiminde yapılır.

ÖRNEK:

$\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 3x + 2} \cdot \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 15}$ rasyonel ifadesini en sade hale getiriniz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 3x + 2} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 15} = \frac{(x-5).(x+2)}{(x+2)(x+1)} \cdot \frac{(x+1).(x-1)}{(x-5).(x+3)}$$

$$= \frac{\cancel{(x-5)}.\cancel{(x+2)}.\cancel{(x+1)}.(x-1)}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x+1)}.\cancel{(x-5)}.(x+3)}$$

$$= \frac{x-1}{x+3}$$ olur.

ÖRNEK:

$\dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 11x + 15} \cdot \dfrac{2x^2 + 9x + 10}{2x^2 - 3x + 1}$ rasyonel ifadesini en sade hale getiriniz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 11x + 15} \cdot \frac{2x^2 + 9x + 10}{2x^2 - 3x + 1} = \frac{(x+3).(2x-1)}{(2x+5).(x+3)} \cdot \frac{(2x+5).(x+2)}{(x-1).(2x-1)}$$

$$= \frac{\cancel{(x+3)}.\cancel{(2x-1)}.\cancel{(2x+5)}.(x+2)}{\cancel{(2x+5)}\cancel{(x+3)}.(x-1).\cancel{(2x-1)}}$$

$$= \frac{x+2}{x-1}$$ olur.

ÖRNEK:

$$\frac{(x-5).(x+4)}{x^2-1} : \frac{(x-5).(2x+3)}{x^2-2x+1}$$ rasyonel ifadesini en sade hale getiriniz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{(x-5).(x+4)}{x^2-1} : \frac{(x-5).(2x+3)}{x^2-2x+1} = \frac{(x-5).(x+4)}{(x-1).(x+1)} : \frac{(x-5).(2x+3)}{(x-1).(x-1)}$$

$$\frac{\cancel{(x-5)}.\cancel{(2x+3)}}{\cancel{(x-1)}.(x+1)} . \frac{\cancel{(x-1)}.(x-1)}{\cancel{(x-5)}.\cancel{(2x+3)}} = \frac{x-1}{x+1}$$ olur.

ÖRNEK:

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} : \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$$ rasyonel ifadesini en sade hale getiriniz.

ÇÖZÜM:

$$\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2} : \frac{x^2-9}{x^2-2x-3} = \frac{(x+3).(x-2)}{(x-2).(x+1)} : \frac{(x-3).(x+3)}{(x-3).(x+1)}$$

$$= \frac{\cancel{(x+3)}.\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}.\cancel{(x+1)}} . \frac{\cancel{(x-3)}.\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-3)}.\cancel{(x+3)}} = 1$$ olur.